

Séquence N 2

ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : EVALUATIONS DES RESSOURCES [15,5pts]

EXERCICE 1 2pts

1- On considère le nombre complexe $u = 1 + i(2 - \sqrt{3})$

a. Montrer que $\frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$. 0,5pt

2- On considère les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $x_0 = 1; y_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $x_n + iy_n = u^n$ 1pt

b) Dédurre que $x_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$ et $y_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$ 0,5pt

EXERCICE 3 6pts

I. Soit les matrices **A** et **B** définies par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 5 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

1- Déterminer la matrice **R** comme reste de la division euclidienne de **AXB** par **10** ($A \times B \equiv R[10]$) 1pt

II. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (31)^k$

1- Déterminer les valeurs de **n** pour que $S_n \equiv 0[12]$ 1pt

2- a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 30S_n = 31^n - 1$. 0,5pt

b- Dédurre que S_{2021} et **31** sont étrangers ($S_{2021} \wedge 31 = 1$). 0,5pt

c-Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a : $31x \equiv 1[S_{2021}] \Leftrightarrow x \equiv 31^{2020}[S_{2021}]$ 0,5pt

3- On suppose que si $p \geq 7; S_p \equiv 1[p]$

a- Montrer que $S_{45} \equiv 4[43]$ et que $S_{45} \equiv 3[47]$. 0,5pt

b- Résoudre $\mathbb{Z}^2$ dans l'équation diophantienne $47x - 43y = 1$. 1pt

c- Déterminer le reste de la division Euclidienne de S_{45} par **2021**. 0,5pt

4- Résoudre le système de congruence $\begin{cases} x - 4 \equiv 0[43] \\ x - 3 \equiv 0[47] \end{cases}$ 1pt

EXERCICE 3 4pts

1- Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x$

a- Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$ 0,5pt

b- Démontrer que f admet une réciproque noté f^{-1} 0,5pt

c- Déterminer sur quel intervalle f^{-1} est-elle dérivable et montrer que $(f^{-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ 1pt

2- Soit (u_n) et (v_n) deux suites définie par : $u_0 = \frac{1}{2}; \quad u_n \in [0; 1] \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}; \quad v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

a- Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$ 0,5pt

b- Montrer par récurrence que $v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$ et que $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{4}{3}(1 - u_n)$ 1pt

c- Montrer que $0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^n$ et que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 - \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n}$ 0,5pt

EXERCICE 4 (3,pts)

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(3; 0; 1)$ $B(0, -1; 2)$ $C(1; -1; 0)$ et $D(1; 1; -2)$

- 1- a- Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. 0,5pt
- b- Dédurre la nature du triangle ABC puis calculer sa surface. 0,5pt
- 2- a- Vérifier que $\vec{n}(2; -5; 1)$ est un vecteur normal au plan. 0,5pt
- b- Dédurre une équation cartésienne du plan ABC . 0,5pt
- 3-a-Determiner la distance du point D au plan ABC . 0,5pt
- b- Déterminer le Volume du tétraèdre $ABCD$ 0,5pt

PARTIE B. ÉVALUATIONS DES COMPÉTENCES : (4,5pts)

L'évolution de chiffre d'affaire de l'entreprise de Mr Maxwell en fonction de numéro de l'années est regroupée dans le tableau ci-dessous

année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
N° de l'année (xi)	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire (yi)	2,4	3,8	4,1	5	5,2	5,6

KAKA l'ami de M. MAXWELL possède un terrain qu'il veut absolument clôturer pour sécuriser doit acheter du fil barbelé pour la clôture de ces terrains. 5mètre de fil barbelé coute 8000FCFA et 1unité est égale 5m.

- **Le terrain** , est formée l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan complexe vérifiant le relation: $Z\overline{Z} + 2(Z + \overline{Z}) + |Z - \overline{Z}| - 11 = 0$ avec $Z = x + iy$.

Dans la boutique de M. MAXWELL, le petit BALAWÉ constate qu'il y a un carton ayant la forme d'un parallélépipède rectangle donc les dimensions mentionner sur le carton sont les suivantes :140cm, 112cm et 84 cm. très curieux de savoir le contenu de ce carton, BALAWÉ demande au boutiquier qu'est-ce qu'il y a dans ce carton ? répondit le boutiquier « ce carton est emplie de cube identiques dont l'arrêtes mesure un plus grand nombre entier de centimètre »

Tâches :

- 1- Déterminer le budget nécessaire pour la clôture de ce terrain 1,25pt
- 2- Quelle sera le chiffre d'affaire de l'entreprise de M. MAXWELL en 2025 1,5pt
- 3- Aidez SOUFYA à trouver le nombre de cube qui se trouve dans ce carton 1,25pt

« Quant vous demandez ou est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen »