



PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 points

EXERCICE 1 : 5 points

I. Un sac contient dix boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont blanches dont les numéros sont 0; 1; 2; 2; 2. Cinq sont noires dont les numéros sont 2; 2; 2; 2; 3.

1) On tire au hasard et simultanément trois boules du sac. Calculer les probabilités des événements : A : « les boules sont blanches », B : « les boules sont de couleurs différentes » et C : « les numéros des boules sont pairs ».

1,25pt

2) Dans cette partie, on enlève la boule blanche numérotée 0 du sac. Il en reste alors neuf boules. On tire successivement et avec remise deux boules. On note par **a** le numéro apparu sur la première boule et par **b** le numéro apparu sur la deuxième et par $d = \text{PGCD}(a; b)$.

a) Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par **d** est $D = \{1; 2; 3\}$.

0,25pt

b) Pour tout $k \in D$, on note $E_k = \{(a; b) / \text{PGCD}(a, b) = k\}$ et P_k la probabilité de E_k . Montrer que $P_1 = \frac{31}{81}$, puis déterminer P_2 et P_3 .

0,75pt

c) Calculer la probabilité de l'événement M : « l'équation $ax + by = 2$ d'inconnues (x, y) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ admet des solutions ».

0,5pt

d) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $3x + 2y = 2$.

0,5pt

II. Soit (V_n) et (U_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n \end{cases} \quad \text{et} \quad U_n = \frac{V_n}{n}.$$

1) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $V_n > 0$.

0,25pt

b) Démontrer que la suite (V_n) est décroissante.

0,25pt

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente.

0,25pt

2) a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

0,5pt

b) Exprimer V_n en fonction de n .

0,5pt

EXERCICE 2 : 5 points

I. Soient l'ensemble $E = \{M(x, y) / 15x^2 + 13y^2 - 2\sqrt{3}xy - 768 = 0\}$ et l'application $g : P \rightarrow P$ qui à tout point M,

associe $g(M) = M'(x', y')$ vérifiant
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ y' = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}.$$

1) a) Montrer que g est une similitude plane directe que l'on caractérisera.

1pt

b) Déterminer g^{-1} .

0,25pt

2) a) Déterminer une équation de $g(E)$.

0,5pt

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g(E)$.

0,75pt

3) En déduire l'ensemble E.

0,5pt

II. Soit ABCDEFGH un cube d'arête a .

1) a) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{GA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CH}$ et à $\overrightarrow{FC}$.

0,5pt

b) Donner la nature de CFH et justifier que $GA = a\sqrt{3}$ et $\|\overrightarrow{CH} \wedge \overrightarrow{FC}\| = aGA$.

0,75pt

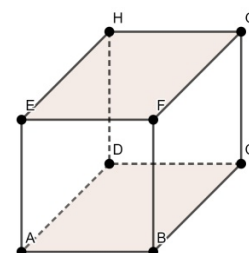
2) On donne $a = 1$ et on munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan (CFH).

0,5pt

b) Déterminer le volume du tétraèdre ACFH.

0,25pt



EXERCICE 3 : 5 points

I- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - 2\ln x, & \text{si } x \in]0; 1[\\ (3x - 3)e^{-x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4 cm.

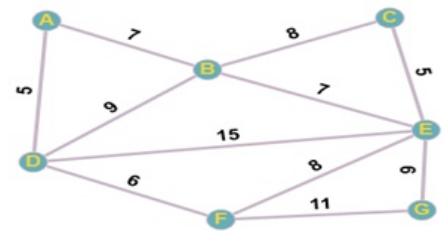
- 1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. 0,5pt
- 2) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. 0,75pt
- 3) a) Montrer que f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. 0,5pt
 b) Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3. 0,25pt
- 4) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) dans le repère (O, I, J) . 0,75pt
- 5) Montrer que la fonction l définie par $l(\alpha) = -\frac{4}{3} + \frac{\alpha^3}{3} + \alpha - 2\alpha \ln \alpha$ est la primitive de f sur $]0; 1[$ qui s'annule en 1. 0,5pt

II- Soit $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\varphi(\vec{i}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$;
 $\varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\varphi(\vec{k}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

- 1) φ est-il un automorphisme ? Justifier votre réponse. 0,5pt
- 2) Soit $E = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $F = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / -2x + 2y + 3z = 0\}$.
 a) Montrer que E est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par $\vec{a}(1; 0; 1)$. 0,25pt
 b) Montrer que F est un plan vectoriel de base $(\vec{b}(1; 1; 0); \vec{c}(3; 0; 2))$. 0,5pt
 c) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 5 points

En janvier 2000, les autorités gouvernementales avaient entamé certains travaux de construction des routes. Ainsi le ministère des travaux publics devait faire bitumer les routes reliant les localités d'une commune très enclavée. L'Etat ne disposant pas d'assez de ressources financières, les ingénieurs du ministère ont décidé de bitumer le moins de kilomètres possibles tout en se rassurant que chaque localité soit accessible par une route bitumée. Sur le graphe ci-contre représentant le réseau routier de cette localité avant les travaux, les sommets représentent les villes et les poids



des arêtes, la distance en km entre deux localités. Le km du bitume était facturé à 150 millions de FCFA.

En avril 2000, une nouvelle cimenterie s'est installée dans la localité B parce que disposant d'un important gisement de pouzzolane. Une étude a permis de modéliser le bénéfice réalisé, en millions de Fcfa, en fonction du nombre d'année x de fonctionnement, par la fonction : $f: x \mapsto -2x + (e^2 - 1)\ln(x) + 2$ définie sur $]0; +\infty[$. Après dix années de fonctionnement, le directeur général, voudrait lors du conseil d'administration du mois de juin 2005, présenter aux actionnaires, les chiffres de l'entreprise durant cette période, Notamment le bénéfice maximal et le bénéfice moyen.

Le fils du maire de cette commune est un étudiant démographe qui fait son stage dans une entreprise. Il est envoyé dans une localité pour mener une enquête. A l'issue de celle-ci, les informations collectées sont résumées dans le tableau ci-dessous. Il souhaite alors avoir une estimation de la population de cette localité en 2090 pour enrichir son mémoire de fin de stage.

Années	2000	2005	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Population y_i	550	560	700	800	875	1120	1390	1500	1700

Tâches :

- 1) Aider le fils du maire à enrichir son mémoire. 1,5pt
- 2) Trouver le cout total de bitumage des routes. 1,5pt
- 3) Trouver le bénéfice maximal ainsi que le bénéfice moyen de cette entreprise. 1,5pt

Présentation :

0,5pt