

EPREUVE DE MATHEMATIQUE

I. EVALUATION DES RESSOURCES : (15.5 pts)

Exercice 1 : (5.5pts)

A/ 1) calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 2x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+3\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$. (1.5pt)

2) On considère la fonction $h : x \mapsto h(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$. (0.75pt)

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2; -1]$. (0.75pt)

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α . (0.5pt)

B/ On considère la fonction $g : x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g . (0.5pt)

2. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$. (0.75pt)

3. En déduire une fonction f ; prolongement par continuité de g en $x_0 = 2$. (0.75pt)

Exercice 2 : (5pts)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E): $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (4 + 6i)z - 8 = 0$.

a. Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule. (1pt)

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. (1.5pt)

c. Soient A ; B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que les points A ; B et C Sont cocycliques. (1.5pt)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (2 + 3i)z^4 + (4 + 6i)z^2 - 8 = 0$. (1pt)

Exercice 3 : (5pts)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1 \end{cases}$.

1. Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (unité graphique : 2cm) (1pt)

2. a. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$. (1pt)

b. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente. (0.5pt)

3. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_n - \frac{5}{2}$.

a. Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{ier} terme. (0.5pt)

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . (0.5pt)

c. Déterminer la limite de $(u_n)_n$. (0.5pt)

II. EVALUATION DES COMPETENCES : (4.5 pts)

JORDAN lance une balle de tennis pour la faire rebondir au sol. Après le 1^{er} rebond, la balle atteint 10m de haut. A chaque rebond, la balle perd 30 % de hauteur.

ARTHUR , un ami de JORDAN lui affirme que sa balle de football qu'il a lancé au sol au moment que JORDAN et après le premier rebond a atteint 15 m de haut (et qui perd 1.5m de haut à chaque rebond) a parcourue la même distance que celle de JORDAN.

1. Au bout de combien de rebonds le mouvement de la balle ne sera plus perceptible (hauteur $\leq 1mm$) ?
2. Sachant que la balle a été lancé d'une hauteur initiale de 1.5m, quelle distance la balle aura-t-elle parcourue au total ?
3. Les propos de JORDAN sont-ils corrects ?