

Exercice 1(5pts)

Les parties I et II sont indépendantes.

- I. n est un entier naturel
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(7^n x) = 2n$. (0,5pt)
 - On considère la suite (V_n) définie par $\ln(7^n V_n) = 2n$.
 - Calculer V_0 . (0,25pt)
 - Montrer que (V_n) est géométrique. On donnera sa raison. (0,5pt)
 - Déduire la limite de V_n . (0,25pt)
 - Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n > n_0$, on ait $V_n > 100$. (0,5pt)
- II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit pour tout entier naturel n , la suite (z_n) de nombres complexes par :
- $$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda \cdot z_n + i \end{cases}$$
- On note M_n le point d'affixe z_n .
- Vérifier les égalités $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$. (0,75pt)
 - Démontrer que, pour tout entier n positif non nul, $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot i$. (0,5pt)
 - Etude du cas $\lambda = i$.
 - Montrer que $z_4 = 0$. (0,25pt)
 - Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle. (on se servira de la relation entre z_{n+1} et z_n). (0,5pt)
 - Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (0,5pt)
 - On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n on a l'égalité $z_{n+k} = z_n$. (0,5pt)

Exercice 2 (4pts)

- I. Soit α un nombre réel tel que $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha + 2 - \cos^2 \alpha = 0$. (0,5pt)
 - Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.
 - Démontrer que M appartient à une hyperbole $(\mathcal{H})$ dont on donnera une équation. (0,5pt)
 - Tracer $(\mathcal{H})$ et déterminer la partie de $(\mathcal{H})$ décrite par M lorsque α décrit $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. (0,5pt)
- II. Soient m un réel et (Γ_m) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $2mx^2 + 8mx - (m-1)y^2 + 7m - 2 = 0$
- Déterminer la nature et les foyers de (Γ_m) pour $m = \frac{1}{2}$ et pour $m = 2$. (1pt)
 - Déterminer m pour que (Γ_m) soit :
 - Un cercle. (0,25pt)
 - Une hyperbole équilatère. (0,25pt)
 - Déterminer suivant les valeurs de m la nature et l'axe focal de l'ensemble (Γ_m) . (1pt)

Exercice 3 (2,5pts)

- I. Pour tout entier naturel n on définit la suite (I_n) par $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$
- Calculer I_0 . (On pourra utiliser l'intégration par parties). (0,5pt)
 - A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I_n = (-e^{-\pi})^n \left(\frac{1+e^{-\pi}}{2} \right)$. (0,5pt)
 - Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - On pose $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_{n-1}$. Calculer S_n et déduire sa limite. (0,5pt)

II. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$. (0,5pt)
2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2nJ_n = (2n - 1)J_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$. (0,5pt)

Problème (8,5pts)

Partie A (2pts) : Résolution de l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$. (0,25pt)
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
 - a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E) . (0,5pt)
 - b) Montrons que v est solution de (E') si et seulement si $u + v$ est solution de (E) et déduire l'ensemble solution de (E) . (0,75pt)
 - c) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0. (0,5pt)

Partie B (2,75pts) Etude de la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ et dresser son tableau de variation. (1pt)
2. L'équation $g(x) = 0$ admet une solution $x = 0$. Montrer que cette équation admet une autre solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près. (0,75pt)
3. Déduire le signe de g suivant les valeurs du réel x . (0,5pt)
4. Soit T la partie de la courbe comprise entre les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de T autour de l'axe $(O, \vec{i})$. (0,5pt)

Partie C (3,75pts) Etude de la fonction principale f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. (0,5pt)
2. Calculer f' et montrer que f' et g ont le même signe. Déduire le tableau de variations de f . (1pt)
3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, (α de la partie B). Donner une valeur de $f(\alpha)$ par défaut. (0,75pt)
4. Tracer la courbe (C) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal. (unité graphique 2cm). (0,5)
5. Soit $m \in]-\infty; 0]$. Calculer $A(m) = \int_m^0 f(x)dx$ à l'aide d'une intégration par partie puis déduire $\lim_{m \rightarrow -\infty} A(m)$. (1pt)