

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 23/09/2026 05:30 creat by Kalanso App

Le théorème de Pythagore : fondement de la géométrie

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce cours vous présentera son énoncé, sa démonstration, ses applications et quelques extensions.

1. Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Soit un triangle ABC rectangle en A. Alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Autrement dit, si l'on note a et b les longueurs des cathètes et c celle de l'hypoténuse, on a :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

« Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. »

2. Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. En voici une classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $(a + b)$. À l'intérieur, plaçons quatre triangles rectangles identiques de cathètes a et b et d'hypoténuse c, disposés de manière à former un carré central de côté c.

L'aire du grand carré est $(a + b)^2$. Elle est aussi égale à la somme des aires des quatre triangles et du carré central :

$$(a + b)^2 = 4 * (1/2 * a * b) + c^2$$

En développant :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

D'où, en simplifiant par $2ab$:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ce qui démontre le théorème.

3. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 3 cm et 4 cm. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

$$\begin{aligned} c^2 &= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \\ c &= \sqrt{25} = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemple 2 : Calcul d'un cathète

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 13 cm et un cathète mesure 5 cm. Quelle est la longueur de l'autre cathète ?

$$\begin{aligned} a^2 + 5^2 &= 13^2 \\ a^2 + 25 &= 169 \\ a^2 &= 144 \\ a &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a pour côtés 7 cm, 24 cm et 25 cm. Est-il rectangle ?

$$\begin{aligned} 7^2 + 24^2 &= 49 + 576 = 625 \\ 25^2 &= 625 \end{aligned}$$

Comme $7^2 + 24^2 = 25^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle.

4. Réciproque et contraposée

Réciproque : Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.

Contraposée : Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Ces énoncés sont très utiles pour démontrer qu'un triangle est ou n'est pas rectangle.

5. Applications et extensions

Le théorème de Pythagore est utilisé dans de nombreux domaines :

- **Géométrie** : calcul de distances, de diagonales, etc.
- **Physique** : calcul de la norme d'un vecteur, décomposition de forces.
- **Navigation** : calcul de distances entre deux points.
- **Informatique** : calcul de distances dans un plan (par exemple, en 2D ou 3D).

Il existe également une généralisation : la loi des cosinus (ou théorème d'Al-Kashi) qui s'applique à tout triangle :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(\gamma)$$

où γ est l'angle opposé au côté c . Lorsque $\gamma = 90^\circ$, $\cos(\gamma) = 0$ et l'on retrouve le théorème de Pythagore.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un pilier de la géométrie et des mathématiques appliquées. Sa simplicité et son utilité en font un outil incontournable. Maîtriser ce théorème, sa réciproque et ses applications permet de résoudre de nombreux problèmes concrets. N'hésitez pas à vous exercer sur des exemples variés pour bien l'assimiler.