

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 23/09/2026 04:05 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Découvert par le mathématicien grec Pythagore (ou plutôt par son école), il est encore aujourd'hui enseigné dans le monde entier et trouve des applications dans de nombreux domaines comme l'architecture, la navigation ou la physique.

1. Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Si on note a et b les longueurs des deux côtés de l'angle droit, et c la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit), alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

L'hypoténuse est toujours le plus long des trois côtés. Le théorème ne s'applique qu'aux triangles rectangles.

2. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm. Calculons l'hypoténuse.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} c^2 &= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \\ c &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

L'hypoténuse mesure donc 5 cm. Ce triplet (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien célèbre.

Exemple 2 : Calcul d'un côté de l'angle droit

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 13 cm et un côté de l'angle droit mesure 5 cm. Quelle est la longueur de l'autre côté ?

On a :

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\5^2 + b^2 &= 13^2 \\25 + b^2 &= 169 \\b^2 &= 169 - 25 = 144 \\b &= \sqrt{144} = 12\end{aligned}$$

L'autre côté mesure 12 cm. Le triplet (5, 12, 13) est aussi un triplet pythagoricien.

3. Réciproque du théorème

La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

Exemple : Un triangle a pour côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm. Vérifions si $10^2 = 6^2 + 8^2$.

$$\begin{aligned}10^2 &= 100 \\6^2 + 8^2 &= 36 + 64 = 100\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée, donc le triangle est rectangle.

4. Démonstrations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore. La plus classique utilise les aires de carrés construits sur les côtés du triangle rectangle.

Considérons un triangle rectangle de côtés a , b et c . On construit un carré de côté $(a+b)$.

À l'intérieur, on place quatre triangles rectangles identiques et un carré de côté c . En calculant l'aire du grand carré de deux façons différentes, on obtient :

$$(a+b)^2 = 4 \times (ab/2) + c^2$$

En développant : $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, d'où $a^2 + b^2 = c^2$.

Cette démonstration visuelle est attribuée à Pythagore lui-même, bien que des preuves plus anciennes existent en Mésopotamie et en Chine.

5. Applications et importance

Le théorème de Pythagore est fondamental en géométrie et en trigonométrie. Il permet de :

- Calculer des distances dans un plan cartésien (formule de la distance entre deux points).
- Résoudre des problèmes de construction et d'arpentage.
- Définir les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente) dans un triangle rectangle.
- Vérifier si un triangle est rectangle.

Il est aussi à la base de la notion de norme euclidienne en algèbre linéaire et intervient dans des domaines comme la physique (calcul de vecteurs) ou l'informatique (algorithmes de distance).

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en mathématiques. Sa simplicité et son utilité en font l'un des premiers théorèmes que l'on apprend et l'un des plus utilisés. Que ce soit pour calculer une longueur manquante, démontrer qu'un triangle est rectangle ou comprendre des concepts plus avancés, il reste incontournable. Maîtriser ce théorème ouvre la porte à de nombreuses applications pratiques et théoriques.