

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 21/09/2026 21:55 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème doit son nom au mathématicien grec Pythagore, bien que des preuves de sa connaissance apparaissent dans des civilisations antérieures, comme en Mésopotamie et en Égypte. Dans ce cours, nous allons explorer son énoncé, sa réciproque, des exemples d'application et quelques démonstrations.

1. Énoncé du théorème

Considérons un triangle rectangle, c'est-à-dire un triangle possédant un angle droit (90°). Les deux côtés qui forment l'angle droit sont appelés les **cathètes**, et le côté opposé à l'angle droit est appelé l'**hypoténuse**. L'hypoténuse est toujours le plus long des trois côtés.

Le théorème de Pythagore s'énonce ainsi :

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Si l'on note a et b les longueurs des cathètes, et c celle de l'hypoténuse, alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. Réciproque du théorème

La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie et très utile pour déterminer si un triangle est rectangle. Elle s'énonce comme suit :

Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et son angle droit est opposé au plus grand côté.

Autrement dit, si $a^2 + b^2 = c^2$ où c est le plus grand côté, alors le triangle est rectangle en le sommet opposé à c .

3. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle dont les cathètes mesurent 3 cm et 4 cm. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

D'après le théorème de Pythagore :

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\text{Donc } c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

On retrouve ici le fameux triplet pythagoricien (3, 4, 5).

Exemple 2 : Calcul d'un cathète

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 13 cm et un cathète mesure 5 cm. Quelle est la longueur de l'autre cathète ?

On a :

$$a^2 + 5^2 = 13^2$$

$$a^2 + 25 = 169$$

$$a^2 = 144$$

$$a = 12 \text{ cm}.$$

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a pour côtés 7 cm, 24 cm et 25 cm. Est-il rectangle ?

On calcule :

$$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

$$\text{Et } 25^2 = 625.$$

Comme $7^2 + 24^2 = 25^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle.

4. Démonstrations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore. En voici une classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, plaçons quatre triangles rectangles identiques de cathètes a et b , disposés de manière à former un carré central de côté c (l'hypoténuse). L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Directement : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- En additionnant les aires des quatre triangles et du carré central : $4 \times (ab/2) + c^2 = 2ab + c^2$.

En égalisant les deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

D'où, après simplification : $a^2 + b^2 = c^2$.

Cette démonstration est attribuée à Pythagore lui-même, bien que d'autres existent.

5. Applications et importance

Le théorème de Pythagore a d'innombrables applications pratiques. En voici quelques-unes :

- **Architecture et construction** : pour vérifier l'équerrage d'un mur ou d'une fondation.
- **Navigation** : pour calculer des distances entre deux points.
- **Informatique** : en infographie, pour calculer des distances entre pixels.
- **Trigonométrie** : il est à la base des relations fondamentales comme $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

De plus, le théorème de Pythagore se généralise à des espaces de dimension supérieure et à d'autres géométries (comme la loi des cosinus).

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un pilier des mathématiques. Il permet de résoudre de nombreux problèmes de géométrie et possède des applications dans des domaines variés. Sa simplicité et son élégance en font un outil incontournable pour les étudiants et les professionnels. Maîtriser ce théorème, sa réciproque et ses applications est essentiel pour progresser en mathématiques.