

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 17:30 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce théorème doit son nom au mathématicien grec Pythagore, bien que des preuves de sa connaissance apparaissent dans des civilisations antérieures, comme en Mésopotamie et en Égypte. Dans ce cours, nous allons explorer l'énoncé du théorème, sa réciproque, quelques applications et des exemples concrets.

1. Énoncé du théorème

Le théorème de Pythagore s'énonce comme suit :

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle est rectangle en A, alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

où BC est l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit), et AB et AC sont les deux autres côtés, appelés cathètes.

Remarque : L'hypoténuse est toujours le plus long côté d'un triangle rectangle.

2. Démonstration visuelle

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. Voici une démonstration classique utilisant des aires.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, on peut disposer quatre triangles rectangles identiques de côtés a , b et d'hypoténuse c , comme le montre la figure ci-dessous (imaginons le dessin). L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Soit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Soit la somme des aires des quatre triangles et du petit carré central de côté c : $4 \times (ab/2) + c^2 = 2ab + c^2$.

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

D'où, après simplification : $a^2 + b^2 = c^2$.

Ainsi, le théorème est démontré.

3. Réciproque du théorème

La réciproque du théorème de Pythagore est également très utile. Elle s'énonce ainsi :

Si dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus long côté.

Autrement dit, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Cette réciproque permet de vérifier si un triangle est rectangle connaissant les longueurs de ses trois côtés.

4. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse

Soit un triangle rectangle en A avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm. Calculons BC.

D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Donc $BC = \sqrt{25} = 5$ cm .

Exemple 2 : Calcul d'un côté de l'angle droit

Soit un triangle rectangle en A avec $BC = 13$ cm et $AB = 5$ cm. Calculons AC.

On a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$13^2 = 5^2 + AC^2$$

$$169 = 25 + AC^2$$

$$AC^2 = 169 - 25 = 144$$

$$AC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm} .$$

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle

Un triangle a pour côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm. Est-il rectangle ?

On calcule :

$$10^2 = 100 \text{ et } 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 .$$

Comme $10^2 = 6^2 + 8^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle.

5. Applications et prolongements

Le théorème de Pythagore a de nombreuses applications pratiques :

- Calcul de distances inaccessibles (par exemple, la largeur d'une rivière).
- Construction de bâtiments pour vérifier les angles droits (méthode du 3-4-5).
- En navigation, pour calculer des distances.
- En informatique, pour calculer des distances euclidiennes.

Il est également à la base de la trigonométrie et de la notion de distance dans le plan cartésien. La formule de la distance entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est une application directe :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en géométrie. Il permet de calculer des longueurs dans un triangle rectangle et de déterminer si un triangle est rectangle. Sa simplicité et son utilité en font l'un des théorèmes les plus importants des mathématiques. Maîtriser ce théorème et sa réciproque ouvre la porte à de nombreuses applications pratiques et à des concepts plus avancés comme la trigonométrie et la géométrie analytique.