

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 22/09/2026 13:25 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce cours vous propose de découvrir son énoncé, sa démonstration, ses applications et quelques extensions.

1. Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (le côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Si on note a et b les longueurs des cathètes et c celle de l'hypoténuse, alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ce théorème porte le nom du mathématicien grec Pythagore (VI^e siècle av. J.-C.), bien que des traces de cette relation apparaissent dans des civilisations plus anciennes (Babylone, Égypte, Inde, Chine).

2. Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. En voici une classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, plaçons quatre triangles rectangles identiques de cathètes a et b et d'hypoténuse c , disposés de manière à former un carré central de côté c .

L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Directement : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- En additionnant les aires des quatre triangles et du carré central : $4 \times (ab/2) + c^2 = 2ab + c^2$.

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

d'où, après simplification :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cette démonstration visuelle est attribuée à Pythagore lui-même, mais d'autres méthodes utilisent la similarité des triangles ou le calcul vectoriel.

3. Exemples d'application

Exemple 1 : Calcul de l'hypoténuse.

Soit un triangle rectangle avec $a = 3$ cm et $b = 4$ cm. Alors :

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ donc } c = 5 \text{ cm.}$$

Exemple 2 : Calcul d'un côté de l'angle droit.

Si l'hypoténuse mesure 13 m et un cathète 5 m, alors l'autre cathète b vérifie :

$$b^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144, \text{ donc } b = 12 \text{ m.}$$

Exemple 3 : Vérifier si un triangle est rectangle.

Un triangle de côtés 7, 24 et 25 est-il rectangle ? On calcule $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ et $25^2 = 625$. L'égalité est vérifiée, donc le triangle est rectangle.

4. Réciproque et contraposée

La **réciproque** du théorème de Pythagore est également vraie : si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.

La **contraposée** permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle : si l'égalité n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle.

Ces énoncés sont très utiles pour démontrer qu'un triangle est rectangle ou non sans avoir à mesurer les angles.

5. Généralisations et applications

Le théorème de Pythagore se généralise à des dimensions supérieures : dans un espace euclidien, la norme d'un vecteur vérifie une relation analogue. En particulier, la distance entre deux points dans le plan cartésien est donnée par :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Il existe aussi la **loi des cosinus** (ou théorème d'Al-Kashi) qui généralise Pythagore aux triangles quelconques :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

où γ est l'angle entre les côtés a et b . Lorsque $\gamma = 90^\circ$, $\cos(\gamma) = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore.

Les applications sont innombrables : calcul de distances, architecture, navigation, informatique (calcul de normes), etc.

Conclusion

Le théorème de Pythagore est un pilier de la géométrie et des mathématiques en général. Sa simplicité et son utilité en font un outil incontournable, que ce soit pour résoudre des problèmes concrets ou pour développer des théories plus abstraites. Maîtriser ce théorème, sa réciproque et ses généralisations est essentiel pour tout étudiant en mathématiques.

Document créé par Kalanso App — 22/09/2026 13:25 — Disponible sur Playstore - App