

Généré par application kalanso sur PLAYSTORE

Sujet : Math — 21/09/2026 15:10 creat by Kalanso App

Le Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés en mathématiques. Il établit une relation fondamentale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Ce cours vous propose de découvrir son énoncé, sa démonstration, ses applications et quelques généralisations.

1. Énoncé du théorème

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (appelés cathètes).

Soit ABC un triangle rectangle en A. Les côtés de l'angle droit sont AB et AC, et l'hypoténuse est BC. Le théorème s'écrit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Cette relation permet de calculer la longueur d'un côté si l'on connaît les deux autres.

2. Démonstration

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. En voici une classique utilisant les aires.

Considérons un carré de côté $a + b$. À l'intérieur, plaçons quatre triangles rectangles identiques de côtés a , b et d'hypoténuse c , disposés de manière à former un carré central de côté c .

L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

- Directement : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- En additionnant les aires des quatre triangles et du carré central : $4 \times (ab/2) + c^2 = 2ab + c^2$.

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2, \text{ d'où } a^2 + b^2 = c^2.$$

Ainsi, le théorème est démontré.

3. Applications

3.1 Calcul de longueurs

Si un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit mesurant 3 cm et 4 cm, alors l'hypoténuse mesure :

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

3.2 Vérifier qu'un triangle est rectangle

La réciproque du théorème de Pythagore permet de déterminer si un triangle est rectangle. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple : Un triangle a pour côtés 6, 8 et 10. On a $10^2 = 100$ et $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Donc le triangle est rectangle.

3.3 Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ se calcule par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Cette formule découle directement du théorème de Pythagore.

4. Généralisations

Le théorème de Pythagore admet plusieurs généralisations :

- **Loi des cosinus** : Dans un triangle quelconque, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$, où γ est l'angle entre les côtés a et b . Si $\gamma = 90^\circ$, on retrouve le théorème de Pythagore.
- **Théorème de Pythagore dans l'espace** : Dans un tétraèdre trirectangle, le carré de l'aire de la face opposée à l'angle trirectangle est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.
- **Espace euclidien** : La norme d'un vecteur $v = (x_1, \dots, x_n)$ est donnée par $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

5. Conclusion

Le théorème de Pythagore est un outil essentiel en géométrie et en trigonométrie. Il permet de résoudre de nombreux problèmes de longueurs, de distances et de

perpendicularité. Sa simplicité et son omniprésence en font l'un des premiers théorèmes que l'on apprend et l'un des plus utilisés, tant en mathématiques pures que dans des domaines appliqués comme la physique ou l'ingénierie.

Document créé par Kalanso App — 21/09/2026 15:10 — Disponible sur Playstore - App